ACHTUNG Dieses Dokument wurde noch nicht korrigiert. Fehler bitte melden!

Rechnen mit der ln-Funktion

Vorwissen:

$log_c(a^b) = b \cdot \log_c a$ Potenzgesetz

Es gilt: $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x \cdot 1 = e^x \quad Wegen\ Kettenregel$

$$e^{ln\,x} = x$$

Es gilt: $ln(e) = 1$

Es gilt: $ln(x) = 0$ entspricht per Festlegung $log_e x = 0$

Die Funktion y = ln(x) ist die Umkehrfunktion der Funktion $y = e^x$

Herleitung:

x und y vertauschen:

$$x = e^y$$

$$ln\,x = ln\,e^y$$

$ln\,x = y \cdot ln\,e$ Potenzgesetz angewendet

$$ln\,x = y \cdot 1$$

$$y = ln(x)$$

Rechnen mit der ln-Funktion:

ln(x) = 0

Ausführlich:

$$ln(x) = 0$$

$$log_e x = 0$$

$$e^0 = x$$

$$1 = x$$

$ln(3x) = 2$

$log_e 3x = 2$

$e^2 = 3x$

$x = \frac{e^2}{3}$

$x = \frac{e^2}{3}$ = 7,39

$ln\left(\frac{1}{2}x\right) + 3 = 2$ | - 3

$ln\left(\frac{1}{2}x\right) = -1$

$log_e\left(\frac{1}{2}x\right) = -1$

$e^{-1} = \frac{1}{2}x \ \mid \cdot 2$

$\frac{2}{e^1} = x$

x = 0,74

ln (3) = x

$log_e 3 = x$

x = 1,1

$log_e 3x = -1$

$e^2 = 3x$

$ln\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

$log_e \frac{1}{x} = 0$

$e^0 = \frac{1}{x}$

$e^0 \cdot x = 1$ $\qquad (e^0 = 1)$

$x = 1$

Beispielaufgabe zu „Quotientengesetz“ und „Produktgesetz“:

$\ln\left(\frac{3}{x}\right) + \ln(6x)$

$= \ln(3) - \ln(x) + \ln(6) + \ln(x)$ | „Quotientengesetz“, „Produktgesetz“

$= \ln(3) + \ln(6)$ | „Produktgesetz“

$= \ln(3 \cdot 6)$

$= \ln(18)$

Beispielaufgabe zu „Potenzgesetz“:

$7 \cdot \ln(x^3) - \ln(x^{21})$

$= 7 \cdot 3 \cdot \ln(x) - 21 \cdot \ln(x)$

$= 21 \cdot \ln(x) - 21 \cdot \ln(x)$

$= 0$

Ableitungen

Herleitung der Ableitung: $(ln(x))' = \frac{1}{x}$

Sei $e^x = y$

$ln\, e^x = ln\, y$ |ln auf beide Seiten angewendet

$x \cdot ln\, e = ln\, y$ | Potenzgesetz

$x \cdot 1 = ln\, y$

$x = ln(e^x)$ | y durch $e^x ersetzt$

$1 = ln(e^x) \cdot e^x$ |Beide Seiten abgeleitet

$1 = ln\, y \cdot y$ |e^xdurch y ersetzt

$\frac{1}{y} = ln\, y$ | : y

$ln(x) = \frac{1}{x}$ |: y durch x ersetzt

Einfache Ableitungen:

$f(x) = 3 \cdot ln(x)$ => $f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{x}$ Wegen Summenregel

$f(x) = ln(3x)$ => $f'(x) = \frac{1}{3x} \cdot 3$ = $\frac{1}{x}$ Wegen Kettenregel

$f(x) = ln(x)$ => $f'(x) = \frac{1}{3x} \cdot 3$ = $\frac{1}{x}$ Wegen Kettenregel

$f(x) = ln(x^2)$ => $f'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$

Produktregel:

Ableitungen ln Funktion

Ableitung mit der Produktregel:

Generell: y=f(x)·g(x)→y′=f′(x)·g(x)+f(x)·g′(x)

1.

$f(x) = x^2 \cdot ln(x)$ => $f'(x) = x^{2\prime} \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \ln(x)' = 2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln(x) + x$

2.

$f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$

$f'(x) = 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$

3.

$$\int \frac{f`(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{x^2}{2x} dx = \ln|(2x)| + C$$

Bilde die ersten drei Ableitungen der ln-Funktion

Exkurs: **Ableitungen mit x im Nenner**

Merke: $\frac{1}{x} = x^{-1}$

Ableitung von x^{-1} ergibt sich wie gehabt durch Multiplikation mit der Potenz und x und Subtraktion der Potenz um 1.

➔ x^{-1} wird zu $-1x^{-2}$

$f(x) = \ln(x)$

$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$f''(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$f'''(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$

Kettenregel:

$f(x) = \ln(x + 3)$

$v(x) = \mathrm{x} + 3$
$v'(x) = 1$

u(v) = ln(v)
u'(v) = $\frac{1}{v}$

f'(x) = v'(x) · u'(x)
f'(x) = 1 · $\frac{1}{v}$

f'(x) = $\frac{1}{x+3}$

f(x) = 8,9 · $\ln(5x^2$ - 2x)

v(x) = x + 3
$v'(x) = 10x - 2$

u(v) = ln(v)

…

$f'(x) = 8{,}9 \cdot (10x - 2) \cdot \frac{1}{5x^2 - 2x}$

$f'(x) = (89x - 17{,}8) \cdot \frac{1}{5x^2 - 2x}$

$f'(x) = \frac{89x - 17{,}8}{5x^2 - 2x}$

Quotientenregel

1)

$f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$ $\quad f'(x) = \frac{1 \cdot \ln(x) - x \cdot \frac{1}{x}}{\ln(x)^2}$ $\quad f'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{\ln(x)^2}$

2)

$f(x) = 5\frac{\ln(x)}{x}$ $\quad f'(x) = 5\frac{\frac{1}{x} \cdot 1 - 1 \cdot \ln(x)}{x^2}$ $\quad f'(x) = 5\frac{1 - \ln(x)}{x^2}$

$f''(x) = 5\frac{(1 - \ln(x))' \cdot x^2 - x^{2\prime} \cdot (1 - \ln(x))}{(x^2)^2}$ $\quad f''(x) = 5\frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \cdot (1 - \ln(x))}{x^4}$

$f''(x) = 5\frac{-x - 2x + 2x \cdot \ln(x)}{x^4}$

$$f''(x) = 5\frac{x \cdot (-1 - 2 + 2\ln(x)}{x^4}$$

$$f''(x) = 5\frac{2\ln(x) - 3}{x^3}$$

$f(x) = (x-1) \cdot ln(x) \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + (x-1) \cdot \frac{1}{x}$

$f'(x) = ln(x) + \frac{x}{x} - \frac{1}{x}$

$f'(x) = ln(x) + 1 - \frac{1}{x}$

Quotientenregel:

$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot ln(x)}{x^2} = \frac{1 - ln(x)}{x^2}$

Stammfunktionen

Oben wurde gezeigt, dass gilt:

$$(ln(x))' = \frac{1}{x}$$

Also ist $F(x) = ln(x) + C$

Eine Stammfunktion von f(x) = $\frac{1}{x}$

Beweis für x > 0:

F'(x) = (ln|x| + C)' = (ln(x) + C)' für x > 0

(ln(x) + C)' = (ln(x))' + C' $= \frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x}$

Beweis für x < 0:

F'(x) = (ln|x| + C)' = (ln(-x) + C)' für x < 0

(ln(-x) + C)' = (ln(-x))' + C' $= \frac{1}{-x} \cdot (-1) + 0 = \frac{1}{x}$

Somit gilt: $\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + C$

$$f(x) = 4 + \frac{1}{x} \Rightarrow F(x) = 4x + ln|x|$$

Die Koordinatenachsen und der Graph der Funktion $f(x) = (x-1) \cdot ln(x)$ begrenzen ein bis ins Unendliche reichendes Flächenstück A (s. Abb. oben). Berechnen Sie dessen Inhalt.

$$F(x) = \int ((x-1) \cdot \ln(x))\, dx \quad | \, Produktregel$$

$$F(x) = \left(\frac{x^2}{2} - x\right) \cdot \ln(x) - \int \left(\frac{x^2}{2} - x\right) \cdot \frac{1}{x}\, dx$$

$$F(x) = \left(\frac{x^2}{2} - x\right) \cdot \ln x - \left(\frac{x^2}{4} + x\right) + C$$

Hilfsfunktionen Produktregel

$$u(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$$

$$u'(x) = (x-1)$$

$$v(x) = ln(x)$$

$$v'(x) = \frac{1}{x}$$

$$F(x) = \int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{z\to 0}\int_z^1 f(x)\,dx = \lim_{z\to 0}\big(F(1) - F(z)\big)$$

$$= \frac{3}{4} - \lim_{z\to 0}(\left(\frac{z^2}{2} - z\right)\cdot \ln z - \frac{z^2}{4} + z)$$

$$= \frac{3}{4}$$

$$\int \ln x \;\, dx = \int 1\cdot \ln x \, dx$$

$$=> \; f(x) = \ln x \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$=> \; g(x) = 1 \qquad g'(x) = x$$

Partielle Ableitung:

$$\int g'(x)\cdot f(x)\,dx = [f(x)\cdot g(x)]\int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

$$\int 1\cdot \ln x \;\, dx = [\ln(x)\cdot x] - \int \frac{1}{x}\cdot x \;\, dx$$

$$\int 1\cdot \ln x \;\, dx = [\ln(x)\cdot x] - \int 1 \;\, dx = [\ln(x)\cdot x] - x$$

$$\int \ln(x)\,dx = \ln(x)\cdot x - x$$